BAREM clasa a IX-a

1. Justificarea faptului că $f(1), f(1)+f(2), \ldots, f(1)+f(2)+\ldots+f(n)$ sunt $1^3, 2^3, \ldots, n^3$, în această ordine .... 3 puncte

$f(n)=(f(1)+\ldots+f(n))-(f(1)+\ldots+f(n-1))=n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$ pentru orice $n \geq 2$ şi $f(1)=1$ .... 4 puncte

2. Ecuația este de forma $\sqrt{10A+a}-\sqrt{A}=a$ .... 2 puncte

$9 \geq a \geq \sqrt{10A}-\sqrt{A}$ implică $A \leq \left(\sqrt{10}+1\right)^2 = 17$, ... 3 puncte

Finalizare: $A=16$ şi numărul este 169 .... 2 puncte

Notă: Orice soluție care afirmă doar că 169 verifică va primi 1 punct

3. Fie $a=\overrightarrow{AB},\ b=\overrightarrow{BC},\ c=\overrightarrow{CD}, d=\overrightarrow{DA}, x=\overrightarrow{A'B'},\ldots, t=\overrightarrow{D'A'}$ .... 1 punct

$x=\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BB'}=-a+2b$ şi analoagele .... 2 puncte

$a=2b-x=\ldots=16a-8t-4z-2y-x$ de unde cum $x+y+z+t=0$, rezultă $a=\frac{1}{15}(y+3z+7t)$ şi analoagele .... 3 puncte

Finalizarea cu afirmarea unicității .... 1 punct

4. a) Pentru $n=6$, considerăm vectorii ce unesc centrul unui hexagon regulat cu vârfurile .... 1 punct

Inducție după n, pentru $A=\left\{\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n}\right\}$. Există $\overrightarrow{v_i}, \overrightarrow{v_j} \in A,\ i \neq j$ astfel ca $\overrightarrow{v_i}+\overrightarrow{v_j} \notin A$. Luăm $B=\left\{\overrightarrow{v_1},\ldots,\overrightarrow{v_n},\overrightarrow{v_i}+\overrightarrow{v_j}\right\}$ .... 3 puncte

b) Fie $A=\left\{\overrightarrow{OX_1},\ldots,\overrightarrow{OX_n}\right\}$. Alegem două axe neparalele de versori $\vec{u},\ \vec{v}$ şi neparalele cu nici unul dintre vectorii $\overrightarrow{OA_i},\ i=1,\ldots,n,\ \overrightarrow{X_1X_2},\ldots,\overrightarrow{X_{n-1}X_n}$ .... 1 punct

Fie $\overrightarrow{OX_i}=a_i\vec{u}+b_i\vec{v}$. Mulțimea $M=\{a_1,a_2,\ldots a_n\}$ de numere reale are proprietatea analoagă cu (S). Fie a cel mai mare element al ei. Avem $a>0$ şi există $b,\ c>0$ cu $a=b+c,\ b\neq c$. Pentru cel mai mic element a' al mulțimii M, există $b', c' \in B$ cu $b', c' < 0, b' \neq c'$ astfel ca $a'=b'+c'$, deci M are cel puțin 6 elemente .... 2 puncte